Matematica finanziaria: svolgimento prova di esame del 24 maggio 2005

1. Si possiede un capitale di 700€ e lo si vuole impiegare per 5 anni. Supponendo che eventuali ricavi intermedi non vengano reinvestiti, calcolare il montante nelle seguenti due ipotesi di investimento:

   (a) regime di interesse composto al tasso d'interesse effettivo dell'8% annuo;

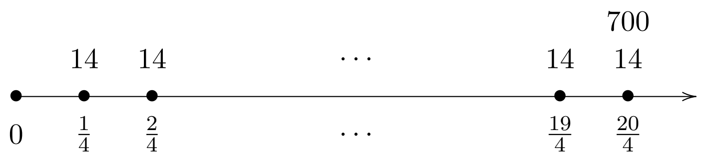
   (b) regime di interesse composto al tasso d'interesse nominale dell'8% annuo, pagabile ogni 3 mesi.

   Si ripeta poi l'esercizio assumendo che eventuali ricavi vengano investiti con una legge di interesse lineare con tasso del 10% annuo.

   Svolgimento. Il punto (a) è immediato. In regime d'interesse composto con un tasso d'interesse effettivo non ci sono ricavi intermedi da reinvestire, pertanto il montante è

$$M_{\mathrm{a}} = 700(1+0.08)^5 = 1028.53.$$

   Nel caso (b), invece, si ha a che fare con un tasso d'interesse *nominale*: 8% di 700€ significa 56€ "all'anno", e pagabili ogni 3 mesi significa che ogni 3 mesi si incasserà una cedola di 14€. Alla fine del periodo d'investimento, inoltre, ci verrà restituito il capitale iniziale di 700€. Il grafico di questo investimento è dunque



   Visto che il testo recita "supponendo che eventuali ricavi intermedi non vengano reinvestiti" (ovvero, man mano che incassiamo le cedole le mettiamo sotto al cuscino), non dobbiamo far altro che sommare tutto per avere il montante:

$$M_{\mathrm{b}} = 700 + 14 \cdot 20 = 980.$$

   La seconda parte chiede di ripetere l'esercizio supponendo di reinvestire eventuali ricavi intermedi in un regime $r(t) = 1 + 0.1t$. Come già detto, nel caso (a) non ci sono ricavi intermedi, e dunque la risposta non cambia. Nel caso (b), i ricavi da reinvestire sono le cedole trimestrali di 14€. Aiutandosi con il grafico, si vede che la prima cedola viene capitalizzata per 19/4 di anno, la seconda per 18/4, e così via. Il montante è allora

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{b}} &= 700 + 14r(19/4) + 14r(18/4) + \cdots + 14r(2/4) + 14r(1/4) + 14r(0) \\
&= 700 + 14\sum_{k=0}^{19} r(k/4) = 700 + 14\sum_{k=0}^{19}(1 + \frac{0.1k}{4}) \\
&= 700 + 14\sum_{k=0}^{19} 1 + 14\sum_{k=0}^{19}\frac{0.1k}{4} = 700 + 14 \cdot 20 + \frac{14 \cdot 0.1}{4}\sum_{k=0}^{19} k \\
&= 700 + 14 \cdot 20 + 0.35 \cdot 19 \cdot 10 = 1046.5.
\end{aligned}$$

   Notare che i tre addendi sono rispettivamente il capitale iniziale, la somma delle cedole senza interessi e il totale degli interessi sulle cedole.

   Altre vie possono essere seguite per arrivare allo stesso risultato. ■

2. Il montante al tempo t anni di un capitale unitario è descritto da una legge finanziaria la cui forza d'interesse è

$$\delta(t) = \frac{0.2t}{1 + 0.1t^2}$$

   (a) Calcolare la legge finanziaria $r(t)$ e dire se si tratta di una legge scindibile;

   (b) calcolare il montante dopo 5 anni di un capitale il cui montante al terzo anno è di 100€;

   (c) niente da dire sui punti precedenti?

Svolgimento. Punto (a). Data la forza d'interesse $\delta(t)$ di una legge finanziaria $r(t)$, sappiamo che

$$r(s) = \exp \int_0^s \delta(t)\, dt.$$

L'esercizio si può quindi apparentemente svolgere solo se si è in grado di calcolare

$$\int_0^s \frac{0.2t}{1 + 0.1t^2}\, dt.$$

Non è così. Sappiamo infatti che la forza d'interesse è $r'(t)/r(t)$, e il numeratore di $\frac{0.2t}{1+0.1t^2}$ è proprio la derivata del denominatore! Quindi anche senza fare esplicitamente l'integrale abbiamo trovato

$$r(t) = 1 + 0.1t^2.$$

Le leggi scindibili in una variabile sono solo quelle esponenziali, quindi $r(t)$ non è scindibile (cosa evidente anche dal fatto che la forza d'interesse non è costante).

Punto (b). Il montante si ottiene scontando 100€ di 3 anni, e poi capitalizzandoli di 5. Dunque

$$M = \frac{100}{r(3)} r(5) = \frac{100}{1 + 0.1 \cdot 3^2}(1 + 0.1 \cdot 5^2) = 184.211.$$

Punto (c). Il montante richiesto al punto precedente è un montante di proseguimento, e poiché la legge non è scindibile (vedi punto (a)) non può essere ottenuto come capitalizzazione di 100€ per 2 anni:

$$100r(2) = 100(1 + 0.1 \cdot 2^2) = 140 \neq 184.211.$$

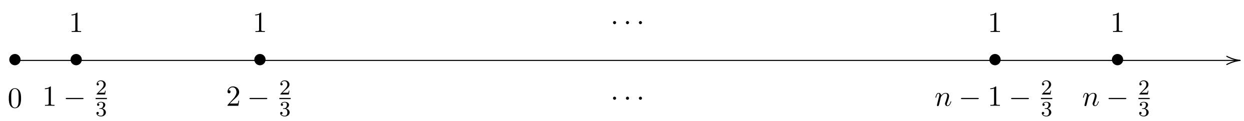
■

3. Calcolare la durata di una rendita unitaria annua posticipata, la cui prima rata verrà riscossa tra 4 mesi, il cui valore attuale al tasso di valutazione del 6% è

$$A = \frac{1.06^{10} - 1}{0.06 \cdot 1.06^{28/3}}$$

Si osservi poi che per $A = 17$ il problema non ammette soluzioni e se ne spieghi il motivo.

Svolgimento. Il grafico di una rendita unitaria annua posticipata, la cui prima rata verrà riscossa tra 4 mesi (cioè 1/3 di anno), di durata incognita n, è



Posto $\nu = 1/1.06$, il valore attuale $V(n)$ di tale rendita è

$$V(n) = \frac{\nu(1 - \nu^n)}{1 - \nu} 1.06^{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{1.06}(1 - \frac{1}{1.06^n})}{1 - \frac{1}{1.06}} 1.06^{\frac{2}{3}}$$

L'equazione che permette di determinare n è $V(n) = A$, cioè

$$\frac{\frac{1}{1.06}(1 - \frac{1}{1.06^n})}{1 - \frac{1}{1.06}} 1.06^{\frac{2}{3}} = \frac{1.06^{10} - 1}{0.06 \cdot 1.06^{28/3}} \iff \frac{\frac{1}{1.06}(1 - \frac{1}{1.06^n})}{\frac{0.06}{1.06}} = \frac{1.06^{10} - 1}{0.06 \cdot 1.06^{10}} \iff$$

$$\iff 1 - \frac{1}{1.06^n} = \frac{1.06^{10} - 1}{1.06^{10}} \iff \frac{1}{1.06^n} = 1 - \frac{1.06^{10} - 1}{1.06^{10}} \iff \frac{1}{1.06^n} = \frac{1}{1.06^{10}} \iff n = 10$$

Dunque la rendita suddetta dura esattamente 10 anni.

Per risolvere la seconda parte dell'esercizio, si deve risolvere l'equazione $A(n) = 17$.

$$\frac{\frac{1}{1.06}(1 - \frac{1}{1.06^n})}{1 - \frac{1}{1.06}} 1.06^{\frac{2}{3}} = 17 \iff 1 - \frac{1}{1.06^n} = \frac{17 \cdot 0.06}{1.06^{\frac{2}{3}}} \iff 1.06^n = \left(1 - \frac{17 \cdot 0.06}{1.06^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1} = 53.0135$$

e dunque il problema -contrariamente a quanto affermato nel testo- ammette soluzione anche per $A = 17$, e precisamente

$$n = \log_{1.06} 53.0135 = 68.1418.$$

Il motivo per cui ammette soluzione è che il valore suddetto di A è inferiore al valore $V(+\infty)$ della stessa rendita di durata infinita:

$$V(+\infty) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\nu(1-\nu^n)}{1-\nu} 1.06^{\frac{2}{3}} = \frac{\nu}{1-\nu} 1.06^{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{1.06}}{1-\frac{1}{1.06}} 1.06^{\frac{2}{3}} = \frac{1.06^{\frac{2}{3}}}{0.06} = 17.3268.$$

Se al posto di 17 avessimo cercato di risolvere il problema con $A = 18$ non avremmo avuto soluzioni, in quanto il valore attuale di una rendita temporanea non supera mai quello della stessa rendita di durata infinita. ■

4. Si consideri un prestito di 1000€ rimborsabile in 4 anni con rata costante annuale e posticipata. Si determini la rata in modo che il rendimento effettivo del prestito risulti del 10%. Scrivere poi il piano di ammortamento del prestito.

Svolgimento. Diciamo R la rata incognita del prestito. Il grafico del prestito dal punto di vista del creditore è

$$\begin{array}{ccccc} -1000 & R & R & R & R \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

e il rendimento effettivo i del prestito si trova risolvendo l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$-1000 + R\frac{\nu(1-\nu^4)}{1-\nu} = 0.$$

Questa equazione non va risolta così com'è (ci darebbe una soluzione dipendente da R), ma va usata per scrivere l'equazione nell'incognita R del problema. Basta per questo sostituire a ν il valore che vogliamo sia soluzione dell'equazione, cioè $\nu = 1/1.1$:

$$-1000 + R\frac{\frac{1}{1.1}(1-\frac{1}{1.1^4})}{1-\frac{1}{1.1}} = 0 \iff R = 1000\frac{0.1}{1-\frac{1}{1.1^4}} = 315.471$$

Il piano di ammortamento è allora:

anno	QC	QI	Rata	DR
1	215.471	100	315.471	784.529
2	237.018	78.4529	315.471	547.511
3	260.72	54.7511	315.471	286.791
4	286.792	28.6791	315.471	-0.000911

■

5. Calcolare (al meglio di due cifre decimali) il TAN e il TAEG di un finanziamento di 8000€ in 4 rate annuali da 2000€, supponendo le spese accessorie pari a 50€ per l'apertura del finanziamento e il 10% di diritti di riscossione su ogni rata.

Svolgimento. Questo finanziamento si sintetizza, dal punto di vista del debitore, nel seguente grafico:

$$\begin{array}{ccccc} -50 & -200 & -200 & -200 & -200 \\ 8000 & -2000 & -2000 & -2000 & -2000 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \tag{1}$$

Il TAN è 0, visto che la somma delle rate dà proprio la somma finanziata. Il TAEG è il tasso interno di rendimento i di (1) (che esiste perchè l'operazione è un finanziamento), e si trova risolvendo l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$f(\nu) = 7950 - 2200\nu - 2200\nu^2 - 2200\nu^3 - 2200\nu^4 = 0.$$

Risolviamo quest'equazione di grado 4 per via numerica, con il metodo della bisezione.

$f(0.9) = 1140.78 > 0, f(0.99) = -632.189 < 0, f(0.95) = 196.361 > 0, f(0.96) = -4.50163 < 0, f(0.955) = 96.4$

da cui ne deduciamo che $\nu \in (0.955, 0.96)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.96. Infine, ricaviamo il TAEG:

$$\text{TAEG} = \frac{1}{\nu} - 1 = 0.04.$$

■

6. Si vuole acquistare un'automobile. Il prezzo dell'automobile è di 10000€. Scegliere con il criterio del REA al 9% annuo tra le seguenti modalità di pagamento:

   (a) pagare in contanti, con uno sconto di 1000€;

   (b) pagare (senza sconto) in 20 rate mensili, secondo un piano di ammortamento francese al tasso mensile dello 0.5%.

Svolgimento. Nel caso (a), il REA è banalmente 9000€. Nel caso (b), dobbiamo prima di tutto determinare la rata R da pagare mensilmente. Questa si trova come nell'esercizio 4, imponendo che il tasso interno di (2) sia 0.005, cioè ponendo $\nu = 1/1.005$ nell'equazione REA $= 0$.

$$\begin{array}{cccccc} -10000 & R & R & \cdots & R & R \\ \bullet & \bullet & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 19 & 20 \end{array} \qquad (2)$$

Il REA di (2) è la soluzione dell'equazione

$$-10000 + R\frac{\nu(1-\nu^{20})}{1-\nu} = 0$$

che con la sostituzione $\nu = 1/1.005$ diventa

$$-10000 + R\frac{\frac{1}{1.005}(1-\frac{1}{1.005^{20}})}{1-\frac{1}{1.005}} = 0 \Longleftrightarrow R = 10000\frac{0.005}{1-\frac{1}{1.005^{20}}} = 526.665.$$

Adesso dobbiamo calcolare il REA di (3), al tasso annuo del 9%.

$$\begin{array}{cccccc} & 526.665 & 526.665 & \cdots & 526.665 & 526.665 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \bullet \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \cdots & \frac{19}{12} & \frac{20}{12} \end{array} \qquad (3)$$

Posto come al solito $\nu = 1/1.09$, si ha

$$\text{REA}_3(0.09) = 526.665\frac{\nu^{\frac{1}{12}}(1-\nu^{\frac{20}{12}})}{1-\nu^{\frac{1}{12}}} = 9776.62$$

e pertanto, nelle ipotesi proposte dal testo dell'esercizio, conviene l'acquisto in contanti (9000€ invece di 9776.62€). ■

7. I titoli A, B, C, D dati dalla tabella 1 sono venduti in maniera tale da produrre YTM $= 0.08$. Ordinarli dal più sensibile al meno sensibile per variazioni dei tassi di valutazione.

Svolgimento. La sensibilità alla variazione dei tassi è misurata dalla durata media finanziaria. Quindi dobbiamo -apparentemente- calcolare la DMF per ciascuno dei 4 titoli in tabella 7. L'esercizio si può però risolvere senza fare alcun conto. Osserviamo prima di tutto che C e D sono titoli senza cedole, e questo ci dà

$$\text{DMF}_C = 3, \text{DMF}_D = 1.$$

Poiché le cedole di A e B si riscuotono tutte tra l'anno 1 e e l'anno 3, la loro duration sarà compresa tra 1 e 3. Inoltre le prime due cedole di B (70€) sono minori delle prime due cedole di A (80€), mentre l'ultima cedola è la stessa per A e B. Ricordando che la durata media finanziaria è una durata pesata dalle cedole, abbiamo senza fare alcun conto che $\text{DMF}_A < \text{DMF}_B$. Quindi

$$\text{DMF}_C > \text{DMF}_B > \text{DMF}_A > \text{DMF}_D.$$

■

8. (**no cleai**) Si assuma una struttura per scadenze descritta dalla tabella 2.

(a) Supponendo valido il modello delle aspettative pure, descrivere la struttura per scadenze attesa per l'anno prossimo;

(b) supponendo l'esistenza di un tasso a termine $i(1,3) = 0.05$, si descriva un arbitraggio.

Svolgimento. Secondo il modello delle aspettative pure, la struttura per scadenze attesa è la struttura dei tassi forward data dalla coerenza del mercato. Dunque bisogna calcolare $i(1,2)$, $i(1,3)$, $i(1,4)$, $i(1,5)$ supponendo che il mercato sia coerente. Sapendo che $r(0,s)r(s,t) = r(0,t)$ otteniamo

$$r(0,1)r(1,t) = r(0,t) \iff r(1,t) = \frac{r(0,t)}{r(0,1)} \iff i(1,t) = \sqrt[t-1]{\frac{r(0,t)}{r(0,1)}} - 1$$

da cui (approssimando a due cifre decimali)

$$i(1,2) = \frac{r(0,2)}{r(0,1)} - 1 = \frac{(1+i(0,2))^2}{1+i(0,1)} - 1 = \frac{1.06^2}{1.05} - 1 = 0.07$$

$$i(1,3) = \sqrt[2]{\frac{r(0,3)}{r(0,1)}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{(1+i(0,3))^3}{1+i(0,1)}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{1.07^3}{1.05}} - 1 = 0.08$$

$$i(1,4) = \sqrt[3]{\frac{r(0,4)}{r(0,1)}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{(1+i(0,4))^4}{1+i(0,1)}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1.08^4}{1.05}} - 1 = 0.09$$

$$i(1,5) = \sqrt[4]{\frac{r(0,5)}{r(0,1)}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{(1+i(0,5))^5}{1+i(0,1)}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{1.09^5}{1.05}} - 1 = 0.10$$

e la struttura per scadenze attesa per l'anno prossimo è data in tabella 3 Svolgiamo ora il punto

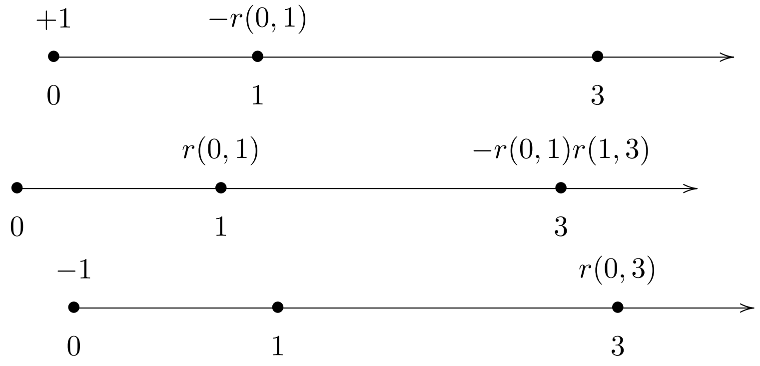
Tabella 1: Titoli A, B, C, D.

anno di pagamento	A	B	C	D
anno 1	80	70	0	0+1000
anno 2	80	70	0	0
anno 3	80+1000	70+1000+10	0+1000	0

Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

anno	1	2	3	4	5
tasso spot	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

(b). Abbiamo appena calcolato che la coerenza del mercato imporrebbe un tasso $i(1,3) = 0.08$. Dunque la presenza di un tasso reale $i(1,3) = 0.05$ permette di costruire il seguente arbitraggio (poiché $0.05 < 0.08$, siamo nel caso $r(0,1)r(1,3) < r(0,3)$):



vendo a pronti un $\textsc{tsc}(1)$

vendo allo scoperto $r(0,1)\textsc{tsc}(1,3)$

acquisto un $\textsc{tsc}(3)$

Alla fine dell'arbitraggio disporrò di

$$r(0,3) - r(0,1)r(1,3) = 1.07^3 - 1.05 \cdot (1.05)^2 = 0.067418 > 0.$$

■

Tabella 3: Tassi spot attesi per l'anno prossimo.

anno	1	2	3	4
tasso spot	0.07	0.08	0.09	0.10